Е. М. Аленина, студ.; рук. А. А. Бойков, доцент
(ИГЭУ, г. Иваново)

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО СЕМЕЙСТВА КРИВЫХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Алгебраические кривые находят широкое применение в различных областях науки и проектной деятельности [1]. При этом кривые высоких порядков (третьего и выше) исследованы недостаточно. В частности, представляет интерес разработка методов построения кривых четвертого порядка с наперед заданной точностью и управления формой кривых четвертого порядка при помощи ограниченного числа величин — параметров. Целью данной работы является исследование семейства кривых четвертого порядка, которое может быть получено при помощи конструктивного алгоритма пересечения поверхностей конуса и цилиндра и проецирования пространственной кривой на плоскость.

Рассмотрим эллиптическую коническую поверхность с вершиной в начале координат и осью OZ и цилиндрическую поверхность (ось перпендикулярна XOZ). Проекция линии пересечения на плоскость XOY определяется после выражения и подстановки уравнением:

$$\left(\frac{c_1^2\cdot a_2^2+a_1^2\cdot b_2^2}{a_1^2\cdot a_2^2\cdot b_2^2}\cdot\left(x-\frac{a_1^2\cdot b_2^2}{c_1^2\cdot a_2^2+a_1^2\cdot b_2^2}\cdot x_0\right)^2+\frac{c_1^2}{b_1^2\cdot b_2^2}\cdot y^2+\left(\frac{c_1^2\cdot x_0^2}{c_1^2\cdot a_2^2+a_1^2\cdot b_2^2}+\frac{z_0^2}{b_2^2}-1\right)\right)^2=4\cdot\frac{z_0^2\cdot c_1^2}{b_2^4}\cdot\left(\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}\right)$$

где a1, b1, c1 — параметры конуса, a2, b2 — цилиндра.

При z0 = 0 уравнение (1) превращается в уравнение совпавших эллипсов — свойство, хорошо известное в начертательной геометрии [2]:

$$\left(\frac{c_1^2\cdot a_2^2+a_1^2\cdot b_2^2}{a_1^2\cdot a_2^2\cdot b_2^2}\cdot\left(x-\frac{a_1^2\cdot b_2^2}{c_1^2\cdot a_2^2+a_1^2\cdot b_2^2}\cdot x_0\right)^2+\frac{c_1^2}{b_1^2\cdot b_2^2}\cdot y^2+\left(\frac{c_1^2\cdot x_0^2}{c_1^2\cdot a_2^2+a_1^2\cdot b_2^2}-1\right)\right)^2=0$$

Интерес представляет собой кривая, конструктивный алгоритм которой может быть сведен к построению прямых и окружностей, примем r1=a1=b1, k=r1/c1 и r2=a2=b2 (цилиндр и конус — круговые):

$$\left(\frac{k^2+1}{k^2}\cdot\left(x-\frac{k^2}{k^2+1}\cdot x_0\right)^2+\frac{1}{k^2}\cdot y^2+\left(\frac{x_0^2}{k^2+1}+z_0^2-r_2^2\right)\right)^2=4\cdot z_0^2\cdot k^2\cdot\left(x^2+y^2\right)$$

Меняя параметры k, r2, x0, z0, можно получить следующие кривые (рис 1). Некоторые подобны кривым семейства овалов Декарта [1]. Достаточно рассмотреть смещение цилиндра только в направлении $x0 \geq 0$, $z0 \geq 0$. Условие касания поверхностей — $r0^2=(x0 \pm k\cdot z0)^2/(1+k^2)$.

Геометрическая конструкция [3] устанавливает соответствие между точками (i) опорной дуги окружности на XOZ и парами точек кривой (M$ и N$). Алгоритм построения пары точек M$ и N$ выглядит следующим образом: h = HR(i); X = PAB(h,t); v = VR(X); c = CCX(S1,v); v = VR(i); [M$,N$] = PAC(v,c), где t — очерковая линия конуса, S1 — вырожденная проекция оси конуса на XOY.

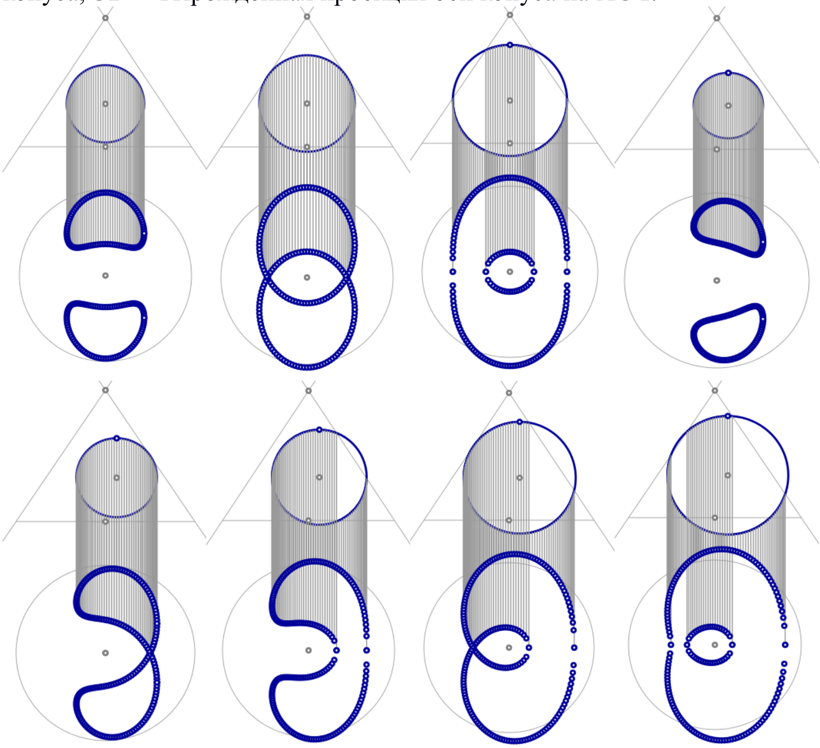

Рис. 1. Кривые рассматриваемого семейства

Основные результаты. Получено уравнение семейства кривых четвертого порядка; исследованы частные уравнения кривых семейства, реализован и опробован конструктивный алгоритм построения кривой. Ввиду сходства рассмотренных кривых и некоторых сечений открытого тора [4], представляет интерес сравнение этих семейств кривых.

Библиографический список

1. Савелов А. А. Плоские кривые. М.: Физматгиз, 1960. 294 с.
2. Иванов Г. С. Начертательная геометрия. М.: ФГОУ ВПО МГУЛ, 2012. 340 с.
3. Бойков А. А. Автоматизация геометрических построений // статья в наст. сборнике.
4. Егорычева Е.В. Пересечение поверхностей / Е.В. Егорычева, А.М. Федотов. Иваново, ИГЭУ. 2011. _ с.